

**„Quadrate querdenken!“ – Ikonische Erarbeitung der
ersten binomischen Formel durch Zerlegung eines
Quadrates in Rechteckflächen**

Entwurf zum vierten Unterrichtsbesuch im Fach Mathematik

Ausbildungsschule: Städtisches Ganztagsgymnasium Nepomucenum
Holtwicker Straße 8
48653 Coesfeld

Datum: Dienstag, 13.09.2016

Lerngruppe: Klasse 8

Anzahl der SuS: 22 (13 Schüler, 9 Schülerinnen)

Zeit, Raum: 3. Stunde (09:55 – 10:40) Raum 213

Referendar: Julian Hundt

Ausbildungsbeauftragte(r):

Schulleiterin:

Fachleiterin:

Kernseminarleiter:

1 Längerfristige Unterrichtszusammenhänge

1.1 Thema der Unterrichtsreihe

Terme und Gleichungen im Zusammenspiel zwischen Geometrie und Algebra – Vorstellungsorientierte Vertiefung der Sprache der Algebra durch Betonung ikonischer Elemente.

1.2 Schwerpunktlernziel der Unterrichtsreihe

Die Schülerinnen und Schüler (kurz: SuS) erweitern ihre Kompetenzen im Bereich des *Problemlösens*, indem sie Terme mit ihren verschiedenen Darstellungen aufstellen, wiedererkennen und bei der Lösung von Problemen die Strategie „Zurückführen auf Bekanntes“ nutzen. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Erarbeitung der binomischen Formeln vom geometrischen und algebraischen Standpunkt, die sie im Folgenden als Rechenstrategie nutzen. Während der Unterrichtsreihe sollen zudem die Kompetenzen des *Verbalisierens* und *Vernetzens* als Teilbereiche des *Argumentierens* und *Kommunizierens* gestärkt werden.

Inhaltsbezogen erweitern die SuS ihre Kompetenzen im Bereich *Arithmetik/Algebra*, indem sie mithilfe des Distributivgesetzes Terme zusammenfassen, ausmultiplizieren und mit einem einfachen Faktor faktorisieren.

Im Sinne eines Spiralcurriculums hat der Aspekt des Darstellungswechsels eine besondere Bedeutung. SuS sollen die Darstellungsmöglichkeiten mathematischer Gedanken, Konzepte und Objekte auf der Ebene der geometrischen Veranschaulichung und der formalen Notation erkennen und ihr harmonisches Zusammenspiel beim Aufbau des Begriffsverständnisses nutzen. Ein solches Zusammenspiel wird im Schwerpunkt der Reihe deutlich, wenn die erste binomische Formel (geometrisch und algebraisch) „entdeckt“ wird.

1.3 Lehrplanbezug

Die Unterrichtsreihe ist anlehnend an den Kernlehrplan Mathematik sowie das schulinterne Curriculum geplant. Die Schwerpunkte liegen dabei in den Inhaltsfeldern Arithmetik/Algebra.

1.3.1 Schulinternes Curriculum [1]

Das schulinterne Curriculum orientiert sich am Lehrbuch Neue Wege für die achte Klasse ([4]). Folgender Ausschnitt zeigt eine Übersicht der in der ersten Unterrichtsreihe zu stärkenden Kompetenzen.

Lehrbuch: Neue Wege 8

Kapitel 1: Die Sprache der Algebra – Terme und Gleichungen

Std.	Prozessbezogene Kompetenzen	Inhaltsbezogene Kompetenzen
6 Wochen	<p>Argumentieren/Kommunizieren</p> <p><i>Verbalisieren</i> die Arbeitsschritte bei mathematischen Verfahren (Konstruktionen, Rechenverfahren, Algorithmen) mit eigenen Worten und geeigneten Fachbegriffen erläutern</p> <p><i>Vernetzen</i> Begriffe und Verfahren miteinander in Beziehung setzen (z. B. Gleichungen und Grafen, Gleichungssysteme und Grafen)</p>	<p>Arithmetik/Algebra</p> <p><i>Operieren</i> Terme zusammenfassen, ausmultiplizieren und mit einem einfachen Faktor faktorisieren; binomische Formeln als Rechenstrategie nutzen</p>

1.3.2 Kernlehrplan [2]

Abbildung 1: Ausschnitt aus dem schulinternen Curriculum [1]

Im Kernlehrplan fallen unter den Bereich Argumentieren/Kommunizieren noch folgende weitere Kompetenzen ([2], S. 24), die der LAA bei der Planung der einzelnen Unterrichtseinheiten mit einbeziehen möchte:

Kommunizieren: SuS vergleichen und bewerten Lösungswege, Argumentationen und Darstellungen.

Präsentieren: SuS präsentieren Lösungswege und Problembearbeitungen in kurzen, vorbereiteten Beiträgen und Vorträgen.

Begründen: SuS nutzen mathematisches Wissen für Begründungen.

1.4 Einordnung der Unterrichtsstunde in den Kontext der Reihe

Die Unterrichtsreihe besteht aus zwei Unterrichtssequenzen, wobei Terme in unterschiedlichen Darstellungen und Kontexten in der ersten Sequenz im Fokus stehen. Die erste Sequenz gipfelt in der Entdeckung der ersten binomischen Formel.

In der zweiten Sequenz werden Gleichungen und ihre vielfältigen Möglichkeiten zur Lösung wiederholt und die Brücke zu Ungleichungen geschlagen. Sie werden dabei in das bestehende Problemlöseschema (Polya) eingefügt.

1. Sequenz	1. UE (Doppelstunde)	„Zündhölzer“ – Die gleiche Situation mit verschiedenen Termen beschreiben und Probleme lösen.
	2. UE (Einzelstunde)	Zusammenfassen, Vereinfachen, Klammern – Wiederholungen in Partnerarbeit / <i>kahoot</i> -Quiz.
	3. UE (Einzelstunde)	„Ein Bild sagt mehr als tausend Worte!“ – Erlaubte Vereinfachungen von Termen ikonisch verstehen
	4. UE (Doppelstunde)	Algebra-Wissen III: Wiederholung des Distributivgesetzes: Ausmultiplizieren und Ausklammern
	5. UE (Einzelstunde)	Vermischte Übungen zu Termen in Lernzeit-Setting
	6. UE (Einzelstunde)	„Meiers‘ märchenhafter mathematischer Garten“ – Verteilungsgesetz mit Summenprodukten im Anwendungskontext
	7. UE (Einzelstunde)	Übungen zu Rechteckdiagrammen (Vertretung durch Seminarverpflichtung des LAA)
	8. UE (Einzelstunde)	„Quadrate querdenken!“ – Ikonische Erarbeitung der ersten binomischen Formel durch Zerlegung eines Quadrates in Rechteckflächen
	9. UE (Doppelstunde)	Erarbeitung der zweiten binomischen Formel durch Transfer und binomische Übungen
2. Sequenz	Gleichungen und Ungleichungen	

2 Planung der Unterrichtsstunde

2.1 Bedingungsanalyse

Die Klasse 8D besteht aus 13 Schülern und 9 Schülerinnen. Drei SuS aus der vergangenen Klassenstufe 7 sind nicht mehr im Klassenverband. Die Gründe davon lagen in einem Wechsel des Wohnortes und Schulleistungsproblemen, die sich auch im Fach Mathematik gezeigt haben. Zuzug hat die Klasse dagegen von A und B bekommen. Während A durch einen Wohnortwechsel innerhalb von NRW nach Coesfeld kam, ist B ein aus dem türkisch-syrischen Grenzgebiet geflohener 14-jähriger Junge. Er ist seit Februar am Gymnasium Nepomucenum und bekommt an der Schule gezielten Deutschunterricht in einer sogenannten *Auffangklasse*. An zwei der vier pro Woche stattfindenden Mathematikstunden nimmt er teil.

Die Unterrichtsstunden der Klasse 8D verteilen sich auf zwei Einzel- und eine Doppelstunde. Der LAA kennt die Klasse bereits aus dem vorangegangenen selbstständigen Unterricht. Das stellt einen großen Vorteil dar, denn so ist er mit den individuellen Stärken, Schwächen und Besonderheiten der einzelnen SuS nun gut vertraut. Neben den Profilen hat er eine Einschätzung dafür gewonnen, welche Formen des Lernens bei der Klasse besonders gut funktionieren.

Die Klasse hat mit dem Beginn des neuen Schuljahres einen anderen Klassenraum bekommen. Hierbei hat die Klassenlehrerin nach Absprache eine frontale Sitzordnung eingerichtet.

Die Atmosphäre in der Klasse ist angenehm und lernförderlich. Dies zeigt sich in einem respektvollen Umgang miteinander und die Fähigkeit in zufällig gebildeten Lerngruppen zielorientiert zu arbeiten. Mit der Klasse hat der LAA bereits einige experimentelle Lern-Settings ausprobiert, etwa die des recht neuen Ansatzes des *game-based-learning* (*gamification* [7]) durch Quiz-Formate wie *kahoot*. Dabei halten sie sich an vereinbarte Regeln und verstehen, dass es nicht um „reines Spielen“ geht.

Der LAA hat sich vorgenommen, eine noch stärkere Unterstützung der wahrgenommenen Defizite einiger SuS zu leisten. C ist weiterhin sehr zurückhaltend im Unterricht. Da seine Versetzung bereits im letzten Jahr gefährdet war, hat der LAA ihn direkt nach den ersten Stunden auf diese weiterhin bestehende Wahrnehmung hingewiesen. Erfreulicherweise haben sich andere Schülerinnen wie etwa D nun deutlich häufiger im Unterrichtsgespräch gemeldet. Der LAA hat die Vermutung, dass die häufige Betonung, Schüleräußerungen müssten nicht immer fachlich perfekt sein und auch „falsche Ansätze“ den Unterricht auf voranbrächten, einige SuS ermutigt hat. Hierbei hat der LAA Ansätze aus den Fachsitzungen zum Umgang mit Fehlern im Unterricht ausprobieren können.

B spricht immer noch sehr wenig deutsch. Da er außer kurdisch und arabisch keine weitere Sprache sicher beherrscht, gestaltet sich die Kommunikation mit ihm weiterhin schwer. Auch zu seinen Mitschülern hat er aufgrund der Sprachbarrieren bislang wenig Kontakt. In den Einzelstunden, in denen er am Mathematikunterricht teilnimmt, versucht der LAA ihn in den aktiven Unterricht mit einzubringen. Erfreulicherweise eignet sich der Ansatz, die abstrakte Sprache der Algebra mit ikonischen Elementen zu verbinden, besonders gut. Während im letzten Schulhalbjahr noch versucht wurde, B individuelle Aufgaben zu geben, hat der LAA sich nun vorgenommen zu versuchen, ihn aktiv ins Unterrichtsgeschehen einzubinden. Leider gestaltet sich der Ansatz durch seine gehäuften Fehlzeiten als problematisch.

Die Klasse ist mit einer besonderen Vielfalt methodischer Arbeitsweisen vertraut. Kooperative Unterrichtsvorhaben machen den SuS oft Spaß und die (ggf. zufällige) Zusammensetzungen beim Bilden von Arbeitsgruppen werden selbstverständlich akzeptiert. Die methodische Vielfalt scheint dafür zu sorgen, dass auch in „klassischen“ Übungs- oder frontalen Phasen konzentriert gearbeitet wird.

In der Klasse 8 entfallen die aus der Klasse 7 bekannten Lernzeit-Stunden. Die bis vor kurzen durchgeführten „Langzeitaufgaben“, welche SuS Zuhause eigenständig bearbeiten sollten, sind auf der Lehrerkonferenz als rechtlich unzulässig eingestuft und aufgegeben worden.

2.2 Leitgedanken und Ziele der Stunde

Die erste binomische Formel durchzieht die Lehrpläne allgemeinbildender Schulen bis in die Oberstufe, so wird sie bei der Zerlegung in Linearfaktoren oder der quadratischen Ergänzung verwendet. Fragt man Erwachsene nach dieser Formel, blickt man nicht selten in erschrockene Gesichter. Auch SuS wenden diese Formel oft falsch an:

„Die erste binomische Formel bereit erfahrungsgemäß bis ins Abitur Probleme und wird immer wieder fehlerhaft angegeben. Woher rührt dieser Fehler? Vermutlich von der Suggestivität der falschen Formel einerseits und von der fehlerhaften Verbindung mit einer visuellen Vorstellung andererseits“ [6, S.59].

Der von Elschenbroich angesprochene Aspekt der fehlenden Verknüpfung der visuellen, geometrischen Vorstellung zur abstrakten Symbolik der Algebra muss jedoch bereits früher hergestellt werden. Die durch den LAA geplante Unterrichtssequenz zu Termen betont die geometrischen Anschauungen, etwas beim Zusammenfassen von Termen.

Diese Stunde ist durch eigene Erfahrungen (Aufteilen, Zerlegen, ggf. Ausschneiden) handlungsorientiert und verfolgt durch die geometrische Vorstellung Verknüpfung das Ziel, dass die SuS die erste binomische Formel fortan mit einer bildlichen Vorstellung verbinden, die sie bei Bedarf abrufen können.

Die geplanten Phasen der Partnerarbeit regen zur Kommunikation und Diskussion an.

Die Zusammensetzung der Partner hat sich der LAA im Vorfeld festgelegt. Die SuS stärken auf einer überfachlichen Sicht ihre Sozialkompetenzen, da sie lernen, mit Mitschülern zu arbeiten, die nicht unbedingt zu ihren „Lieblingsarbeitspartnern“ gehören. B soll gezielt mit Younes arbeiten, da letzterer zu den starken Schülern gehört und zudem besonders talentiert ist, seinen Mitschülern Dinge ruhig zu erklären.

Stichwortartig zeichnet sich die geplante Unterrichtsstunde wie folgt aus:

Handlungsorientierung, Differenzierung, Geometrie trifft Algebra, spiralcurricular, Selbstdeckendes Lernen, Erkundungsaufgabe, Partnerarbeit.

2.2.1 Unterrichtsgegenstand

Die erste binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

2.2.2 Thema

„Quadrate querdenken!“ – Ikonische Erarbeitung der ersten binomischen Formel durch Zerlegung eines Quadrates in Rechteckflächen

2.2.3 Schwerpunktlernziel

Die SuS vertiefen ihre Kompetenzen im Bereich der *Arithmetik/Algebra* und *Geometrie*, indem sie die erste binomische Formel über einen geometrischen Ansatz herleiten und sie mittels des Distributivgesetzes bestätigen.

2.2.4 Weiteres Lernziel

Die SuS erweitern ihre Kompetenzen im Bereich des *Argumentierens und Kommunizierens*, indem sie „mathematische Sachverhalte verständlich und zutreffend mitteilen und sie als Begründung für Behauptungen und Schlussfolgerungen nutzen“ ([2], S.12). Diese Kompetenzen werden in Phasen der Partnerarbeit als auch in Präsentationsphasen gestärkt.

2.2.5 Hausaufgaben

Im Rahmen des Ganztagskonzepts am Nepomucenum werden in der Sekundarstufe I keine Hausaufgaben erteilt.

2.3 Planung des Stundenverlaufs

Name: Julian Hundt Lerngruppe: 8D Mathematik Datum: 13.09.2016 09:55 – 10:40		STUNDENTHEMA: „Quadrate querdenken!“ – Ikonische Erarbeitung der ersten binomischen Formel durch Zerlegung eines Quadrates in Rechteckflächen“ ZIEL: Die SuS vertiefen ihre Kompetenzen im Bereich der <i>Arithmetik/Algebra</i> und <i>Geometrie</i> , indem sie die erste binomische Formel über einen geometrischen Ansatz herleiten und sie mittels des Distributivgesetzes bestätigen.		
Phasen	Unterrichtsgeschehen	Did. /Meth. Kommentar	Sozial form	Medien
Organisation	Begrüßung der SuS und des Besuchs		LV	
Einstieg <i>Motivation und Aufmerksamkeit</i> <i>Ankommen im Lernkontext</i>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ L. zeigt die ersten vier Bilder des Comics <ul style="list-style-type: none"> ○ SuS lesen den Comic ➤ Letztes Bild dient als stummer Impuls <ul style="list-style-type: none"> ○ SuS-Reaktion: Zustimmung, Ablehnung, Unsicherheit ➤ Streitfrage: „Wer hat Recht?“ ➤ Impuls: L. legt Bilder 5+6 des Comics auf <ul style="list-style-type: none"> ○ SuS lesen weiter ○ Ziel der Stunde herausstellen: Herausfinden, wie man $(a+b)^2$ auflösen kann und... „wer hat Recht?“ ➤ → Überleitung Erarbeitungsphase – Erklärung der Methodik: ➤ Zerteilung ➤ Partnerarbeit, Tippkarten, Quadrate (2x), Folie (1x) ➤ L. zeigt Arbeitspartner-Folie und zeigt Materialpakete pro Team, Zeit bis zur Ergebnispräsentation notieren 	Stummer Impuls, ggf. Murmelfase im Anschluss. Intention: kognitiv. Konflikt Fokussieren → Zieltransparenz schaffen Methodische Klarheit als Voraussetzung für hohen Lernzeitanteil	UG LV	OHP: Comic – Bilder 1-4 OHP: Comic – Bilder 5+6
Erarbeitung <i>Erkundung und Entdeckung des Problems</i>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ SuS... <ul style="list-style-type: none"> ○ sichten mit ihren Partnern das Material ○ untersuchen verschiedene Zerlegungen des Quadrates in Teilflächen ○ leiten eine Zerlegung für das Quadrat mit den Seitenlängen $(a+b)$ her. ○ schließen durch Zerlegen auf die erste binomische Formel ○ bestätigen die Formel mit Hilfe des Distributivgesetzes 	Hoher Grad an Eigenaktivität Gegenseitige Unterstützung durch Partnerarbeit Forschend-entdeckendes Lernen	EA / PA	Arbeitsblätter (DINA5), „Papierquadrate“, „Quadratfolie“, Tippkarten (Fensterbank)

	<ul style="list-style-type: none"> ○ nutzen ggf. Tippkarten ➤ L. beobachtet den Lernprozess und unterstützt individuell 			
<p>Sicherung</p> <p><i>Präsentation der Ergebnisse</i></p> <p><i>Diskussion des Lernproduktes</i></p> <p><i>Lernzugewinn definieren</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> ➤ L. bittet ein SuS-Team nach vorne ➤ SuS stellen ihre Ergebnisse vor (Aufgabe 4) Aufgabe für den Rest „Achtet auf die Erläuterungen (Argumentation, Fachsprache, Verständlichkeit) der Vortragenden!“ ➤ Moderation: Fokussierung von Problemstellen (etwa typischer Fehler (Aufgabe 3)) ➤ Tafelanschrieb: Erste binomische Formel mit Beispiel 	<p>Förderung des p.-bez. Kompetenz: kommunizieren, argumentieren, präsentieren</p> <p>Mögliches Stundenende 1</p>	SV/UG	OHP: Folien
Anwendung	<ul style="list-style-type: none"> ➤ L. erteilt Sprinteraufgabe S1 für alle. 	<p>Did. Reserve</p> <p>Mögliches Stundenende 2</p>	EA	

3 Anhang

3.1 Quellen

[1]: Schulinternes Curriculum Mathematik für die Klassenstufe 8, Internetquelle:

<http://www.nepomucenum.de/facher/mathematik/>

[2]: Kernlehrplan Mathematik für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8) in NRW, Internetquelle:

http://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/lehrplaene_download/gymnasium_g8/gym8_mathematik.pdf

[3]: Unterrichtseinstiege für den Informatikunterricht – Reader: Interne Seminarfortbildung (ZfsL Bocholt, 2016)

[4]: Mathematik Neue Wege SI – Arbeitsbuch 8, NRW, Schroedel Verlag, Braunschweig.

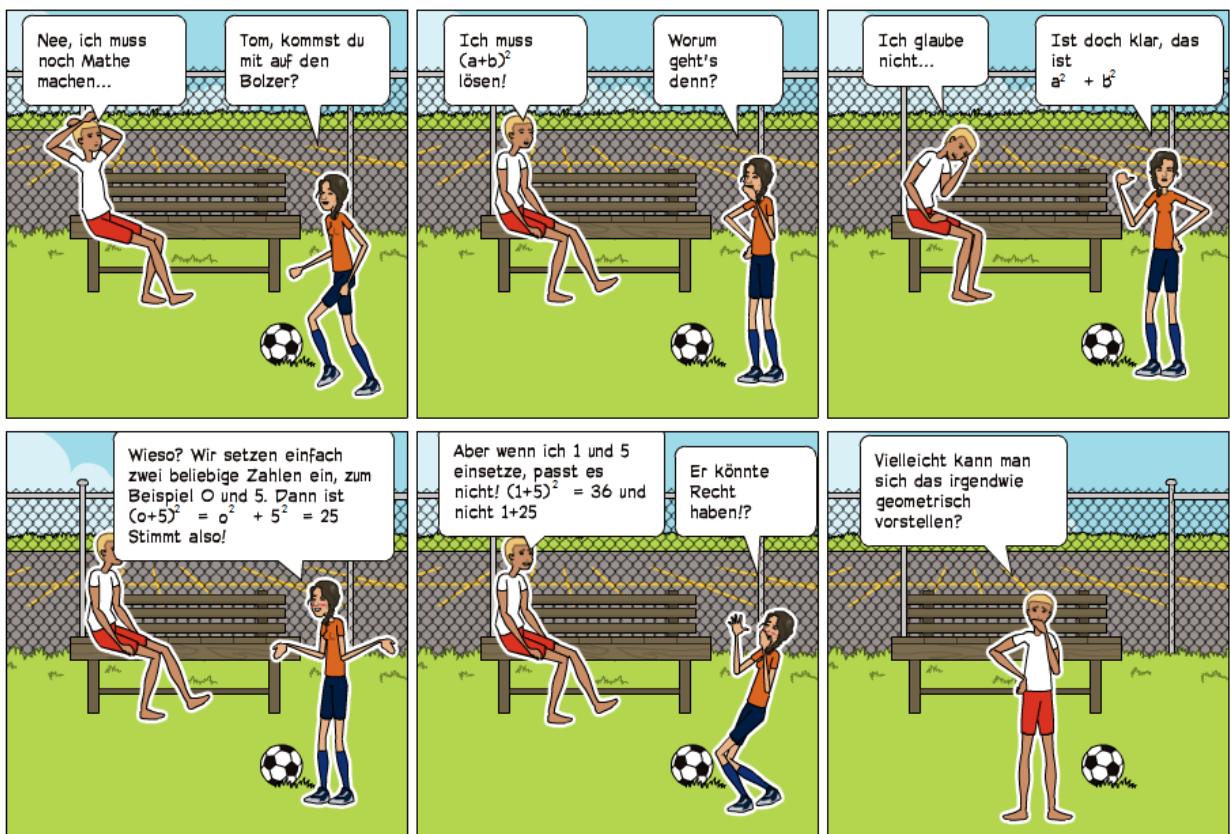
[5]: Comic: eigene Darstellung mit Hilfe von pixton-Comics nach einer Idee von J. Brumma (Gymnasium Nepomucenum): www.pixton.com/de

[6]: Elschenbroich, Mit dem Computer anschaulich beweisen. In: Mathematik lehren, Heft 155, 2009, S. 58ff.

[7]: Digital Game Based Learning, Wikipedia, Internetquelle:

https://de.wikipedia.org/wiki/Digital_Game-based_Learning

3.2 Folie zum Einstieg



3.3 Geplantes Tafelbild

Erste binomische Formel

Die erste binomische Formel lautet:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Mit ihr können Terme der Form $(a+b)^2$ schnell und einfach ohne das Distributivgesetz ausgerechnet werden!

Beispiel:

$$(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$$

3.4 Arbeitsmaterialien

3.4.1 Arbeitsaufträge



Die Sprache der Algebra: Terme ikonisch verstehen - binomische Formeln
(13.09.16)

„Quadrate querdenken!“ - Entdeckung der ersten binomischen Formel



(1) Teile die Seitenlänge des Quadrates (6cm) so auf, dass diese aus den Teilstücken 1cm und 5 cm bestehen.

Tipp A

Beschreibe kurz mit Hilfe der vier entstehenden Teilflächen, worin Evas Fehler besteht.



(2a) Zerlegt ein weiteres Quadrat in Teilstücke
Notiert Auffälligkeiten!

Tipp B

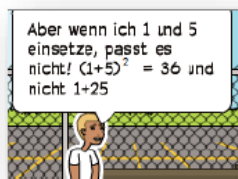
(2b) Zerlegt ein weiteres Quadrat mit der Seitenlänge $a + b$ nach dem selben Prinzip.

Tipp C

Abbildung 1: Evas Fehler

Folgt damit die erste binomische Formel

$$(a+b)^2 =$$



(2c) Die Formel kann auch ganz ohne ein Bild erklärt werden. Ermittelt sie mit Hilfe des Distributivgesetzes oder eines

Tipp D

Rechteckdiagramms (letzte Stunde!)

(3) Bereitet eine 2-Minuten-Präsentation vor, mit der ihr die erste binomische Formel euren Mitschülern erklären könnt! Verwendet dazu eine Skizze (z.B. das vorgefertigte Quadrat auf der Folie).

Sprinteraufgaben (zur Auswahl)

(S1) Mit Hilfe der ersten binomischen Formel können Quadratzahl trickreich und schnell berechnet werden. Versuche dies für $27^2 = (20+7)^2 = \dots$

(S2) Kannst du erklären, warum das erste Zahlenbeispiel der „falschen binomischen Formel“ funktioniert, das zweite jedoch fehlschlägt?

(S3) Erfinde eine Fortsetzung des Comics!

3.4.2 Quadrat-Papier und Quadrat-Folie

Hierbei handelt es sich lediglich um auf Papier bzw. Folie gedruckte Quadrate mit einer Seitenlänge von 10cm. Diese werden lediglich aus zeitökonomischen Gründen verwendet.

3.4.3 Hilfestellungen

Für die zweite Aufgabe stehen folgende konsekutive Tippkarten für schwächere Schüler-Teams zur Verfügung:

3.5 Ergänzendes Material

3.5.1 Sprinteraufgaben

Für starke SuS-Teams stehen bis zu drei Sprinteraufgaben zur Auswahl, die mit auf das Arbeitsblatt gedruckt werden. Hierbei können sie weitere Entdeckungen machen, ohne im Unterricht zu weit voranzuschreiten. Explizit soll nicht die zweite binomische Formel hergeleitet werden, da dies in der Folgestunde geschehen soll. Stattdessen besteht eine weitere Aufgabe, sich eine kreative Fortsetzung des Comics zu überlegen. Hierbei müssen sich die SuS in die Rolle der Lehrenden hineinversetzen und eine gute Erklärung ausdenken (Lernen durch Lehren).

3.5.2 Vereinfachter übersetzter Text auf Arabisch

Wegen der weiterhin starken sprachlichen Hindernisse (siehe 2.1) hat der LAA sich entschieden, einen vereinfachten arabischen Aufgabentext für B zur Verfügung zu stellen, damit dieser besser nachvollziehen kann, was in der Arbeitsphase zu tun ist. Er erhält somit ein Aufgabenblatt mit deutscher Sprache und findet auf der Rückseite eine Übersetzung.

Die Übersetzung wurde maschinell mit dem „Google Translator“ vorgenommen, diese hat in der Vergangenheit bereits zufriedenstellende Ergebnisse geliefert.